第 1 章

# 測量與不確定度

## 學習脈絡

不確定度
$u=\sqrt{u_A^{\,2}+u_B^{\,2}}$

同時存在 A 類與 B 類

$\begin{cases} \text{不確定度 } u(Z)=\sqrt{u(X)^2+u(Y)^2} \\ \text{測量結果：}\begin{cases} \text{相加 } =(X+Y)\pm u(Z) \\ \text{相減 } =(X-Y)\pm u(Z) \end{cases} \end{cases}$

加減後

基本統計

平均值

$\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

標準差

$s=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$

A 類評估

不確定度
$u(X)=\dfrac{s}{\sqrt{n}}$

計算流程

| 步驟 | 說明 |
|---|---|
| 步驟 1 | **求出 $\bar{x}$ 與 $s$**<br>分別算出 $\bar{x}$ 與 $s$，可暫時不需擔心保留位數，將計算結果寫下即可。 |
| 步驟 2 | **求出不確定度 $u(X)$**<br>將 $u(X)=\dfrac{s}{\sqrt{n}}$ 的計算結果，以無條件進位法，至多保留 2 位有效數字，即為不確定度。 |
| 步驟 3 | **求出最佳估計值 $X$**<br>將 $\bar{x}$ 的計算結果，以四捨五入進位法，保留到與不確定度的末位一致，即為最佳估計值 $X$。 |
| 步驟 4 | **寫出測量結果**<br>測量結果 $=X\pm u(X)$ |

# 測量與不確定度

## 不確定度的組合

### 相乘後

$$\begin{cases} \text{不確定度 } u(Z)=|XY|\sqrt{\dfrac{u(X)^2}{X^2}+\dfrac{u(Y)^2}{Y^2}} \\ \text{測量結果 } =XY\pm u(Z) \end{cases}$$

### 相除後

$$\begin{cases} \text{不確定度 } u(Z)=\left|\dfrac{X}{Y}\right|\sqrt{\dfrac{u(X)^2}{X^2}+\dfrac{u(Y)^2}{Y^2}} \\ \text{測量結果 } =\dfrac{X}{Y}\pm u(Z) \end{cases}$$

## 物理量的因次

### 力學基本量與因次

長度 L
時間 T
質量 M

### 導出量的因次

表示為 $L^aM^bT^c$ 的冪次組合

### 因次分析法

方程式中之每一項必定具有相同的因次

## 不確定度的評估

### B 類評估

不確定度

$$u(X)=\frac{\text{儀器精確度}}{2\sqrt{3}}$$

### 計算流程

| 步驟 | 說明 |
|---|---|
| 步驟 1 | **求出不確定度**<br>依據規格說明、過往數據分析、數據隨附資料等等估算，至多保留 2 位有效數字，即為不確定度 $u(X)$。 |
| 步驟 2 | **求出最佳估計值**<br>將測量值以四捨五入進位法，保留到與不確定度的末位一致，即為最佳估計值 $X$。 |
| 步驟 3 | **寫出測量結果**<br>測量結果 $=X\pm u(X)$ |

# 1-1 簡介不確定度

## 一、誤差與不確定度

1. 誤差（舊觀念）

⑴當我們想針對特定現象進行定量分析時，就必須進行一系列的測量，測量值與真值（或標準值、準確值）間的偏差，稱為**誤差** (error)，如圖 (a) 所示。誤差的定義為

**誤差 ＝ 測量值 － 真值**

⑵上列誤差的定義看似合理，但量測結果的**「真值」，實際上無法準確獲得，「誤差」自然無法估算。**以量身高為例，將測量值減真值就是誤差。但身高也是測量才得知的，因此我們並無法真確得知身高的真值是多少（最常用的方法是用測量的平均值來當真值）。換言之，我們是利用一個不確定的值來定義誤差，誤差自然也就無法有效估算了！

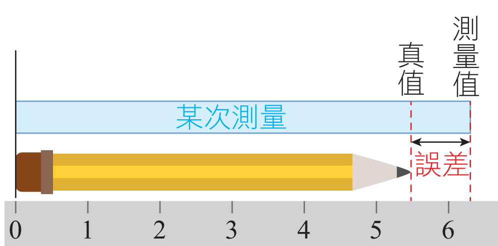
2. 不確定度（新觀念）

⑴原先國際上對於誤差分析並無共識，一直到了 1993 年，才由國際標準化組織 (International Organization for Standardization，ISO) 聯合其他國際組織，以**不確定度** (uncertainty) 的觀念取代誤差，並建立量測不確定度的評估與表示規則 (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, ISO-GUM)。ISO-GUM 最後的版本於 2008 年修訂，為現今分析量測結果的國際標準。

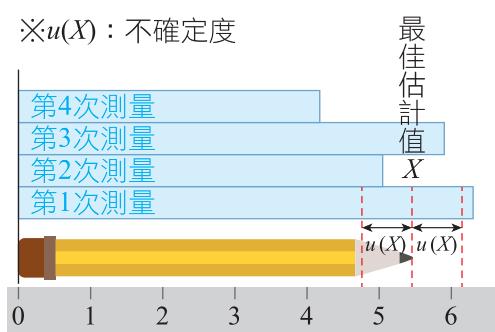
⑵所謂不確定度，是因為測量的真值難以確定，因此測量結果應該是一個估計區間才是合理的，如圖 (b) 所示（其計算的方法，後續會有詳細的討論）。測量結果可表示為

**測量結果 ＝ 最佳估計值 $X$ ± 不確定度 $u(X)$**

⑶量測不確定度是以科學的程序估算被量測值的**離散程度**，其大小決定了量測結果的使用價值。**不確定度愈小，量測結果的品質愈好，使用價值也愈大。**




▲圖 (a)　誤差的概念




▲圖 (b)　不確定度的概念

3. 不確定度的種類

不確定度分為 A、B 兩類：

- 不確定度評估
  - A 類評估：依據多次測量數據進行統計分析而來。
  - B 類評估：依其他資訊來源（權威機構發布的量值、材料或儀器特性、製造商提供的規格、校正證書……等等）研判而來。

4. 誤差和不確定度的比較

| 測量物理量 $x$ | 誤差 | 不確定度 |
|---|---|---|
| 意涵 | 測量值與真值的差 | 測量值的分散程度 |
| 數值 | 正負值皆有可能 | 恆為正值 |
| 符號 | 無規定 | 以 $u(X)$ 表示 |
| 分類 | 系統誤差、隨機誤差 | A 類評估和 B 類評估 |

## 二、平均值與標準差

1. 平均值

假定某一物理量 $x$ 的多次測量值為 $x_1$、$x_2$、⋯、$x_n$，則該物理量 $x$ 的平均值為

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

2. 標準差

(1) 高一數學曾學過，如果可以得到母體資料 $x_1$、$x_2$、⋯、$x_n$，其標準差定義為

$$\sigma=\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

式中標準差 $\sigma$（讀作 sigma）稱為**母體標準差**。標準差用以表示測量值之間的**離散程度**，標準差愈小表示離散程度愈小；標準差愈大表示離散程度愈大。

(2) 研究上為了節省時間與經費，在實驗室的狀況通常只是取得代表性樣本 $x_1$、$x_2$、⋯、$x_n$，而不是母體資料。經由統計上的計算，上式需修正為

$$s=\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

上式的 $s$ 稱為**樣本標準差**。當樣本個數 $n$ 愈大時，$s$ 與 $\sigma$ 會愈趨近於相等。

3. 實例說明

| 情境 | 某小型學校全班 7 位同學的物理成績 | | | | 物理老師為研究龍騰高中的物理學習狀況，隨機抽測 7 位學生所得的物理成績 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 分數 $x_i$ | 平均值 $\bar{x}$ | 差值平方 $(x_i-\bar{x})^2$ | 母體標準差 $\sigma$（取小數點後 2 位） | 分數 $x_i$ | 平均值 $\bar{x}$ | 差值平方 $(x_i-\bar{x})^2$ | 樣本標準差 $s$（取小數點後 2 位） |
| #1 | 45 | | 225 | | 45 | | 225 | |
| #2 | 50 | | 100 | | 50 | | 100 | |
| #3 | 55 | | 25 | | 55 | | 25 | |
| #4 | 60 | 60 | 0 | $\sigma=\sqrt{\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2}$ $=10.00$ | 60 | 60 | 0 | $s=\sqrt{\frac{1}{7-1}\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2}$ $=10.80$ |
| #5 | 65 | | 25 | | 65 | | 25 | |
| #6 | 70 | | 100 | | 70 | | 100 | |
| #7 | 75 | | 225 | | 75 | | 225 | |

## 課外補充資料

**以電腦軟體或手機APP輔助運算標準差**

計算平均值和標準差乃至後續要討論的不確定度，都是極為繁瑣的事，本章的學習重點在於學會處理實驗數據的正確方法，至於繁瑣的計算，可以交給電腦、手機或計算機處理喔！下面我們將以最通行的試算表軟體 Excel，利用上述兩個例子來說明計算平均值、母體標準差和樣本標準差的方法。目前，該試算表的手機 APP 是免費的喔！

(1)母體標準差

| | A | B | |
|---|---|---|---|
| 1 | | 物理成績 | 這邊輸入數據 |
| 2 | #1 | 45 | |
| 3 | #2 | 50 | |
| 4 | #3 | 55 | |
| 5 | #4 | 60 | |
| 6 | #5 | 65 | |
| 7 | #6 | 70 | |
| 8 | #7 | 75 | |
| 9 | 平均值 | 60 | =AVERAGE(B2 : B8) |
| 10 | 母體標準差 | 10.00 | =STDEV.P(B2 : B8) |

(2)樣本標準差

| | A | B | |
|---|---|---|---|
| 1 | | 物理成績 | 這邊輸入數據 |
| 2 | #1 | 45 | |
| 3 | #2 | 50 | |
| 4 | #3 | 55 | |
| 5 | #4 | 60 | |
| 6 | #5 | 65 | |
| 7 | #6 | 70 | |
| 8 | #7 | 75 | |
| 9 | 平均值 | 60 | =AVERAGE(B2 : B8) |
| 10 | 樣本標準差 | 10.80 | =STDEV(B2 : B8) |

※ AVERAGE 是 Excel 中用來算平均值的函數，其語法為：AVERAGE（範圍）。

※ STDEV.P 是 Excel 中用來算母體標準差的函數，其語法為：STDEV.P（範圍）。

※ STDEV 是 Excel 中用來算樣本標準差的函數，其語法為：STDEV（範圍）。

## 三、不確定度的A類評估

### 1. 測量的不確定度

(1) 根據 ISO-GUM，測量的不確定度 $u(X)$ 之定義為 $u(X)=\dfrac{s}{\sqrt{n}}$。

(2) 由上式可知：不確定度 $u(X)$ 主要與測量方法及測量次數有關，如右圖所示。

$u(X)=\dfrac{s}{\sqrt{n}}$

實驗方法愈好，
標準差愈低，
分子變小，
故可降低不確定度

測量次數增加，
分母變大，
故可降低不確定度

(3) 不確定度該保留的位數，牽涉到測量與統計的技術性細節， 超過高中物理的範圍。但一般來說，不確定度以**無條件進位法，至多保留兩位有效數字**，在高中範圍內，我們遵照此原則即可。

### 2. 測量的最佳估計值

(1) 每一個待測物理量的真值通常是無法知道的，但測量的次數 $n$ 夠大時，平均值 $\bar{x}$ 即趨近於真值了。

(2) 將實驗所得的平均值 $\bar{x}$ 依據 ISO-GUM 使用四捨五入進位法，保留到與不確定度的末位一致，即為**最佳估計值**，記為 $X$。

### 3. 測量結果的表示法

$\dfrac{\text{標準差}}{\sqrt{\text{測量次數}}}$，以無條件進位法，至多保留兩位有效數字

測量結果 ＝ 最佳估計值 ± 不確定度 ＝$X\pm u(X)$

將 $\bar{x}$ 四捨五入保留到與不確定度的末位一致

**※ 註1：不確定度的進位法**

依據 ISO-GUM 的規定，計算不確定度時，採用「無條件進位法，保留 2 位有效數字」的原則。但在實際計算時，亦需配合常理判斷。舉例來說，若初步計算結果為 $u=0.1407$ cm 時，應將不確定度記為 $u=0.14$ cm。也就是說，2 位有效數字的下一位數為零時，應該捨去才較為合理。

**※ 註2：有效數字**

有效數字是用來標示測量時有意義的位數。簡單的判定法則如下：

(1) 非零的數字都是有效數字，如 16.72 共有 4 位有效數字。
(2) 非零數字間的零是有效數字，如 2009.1704 共有 8 位有效數字。
(3) 前綴零不是有效數字，如 0.0049 僅有 2 位有效數字。
(4) 小數點後綴零是有效數字，如 173.400 共有 6 位有效數字。

在此「前綴零」指的是最左位數的非零數字前方出現的零，而「後綴零」指的是最右位數的非零數字後方出現的零。要特別注意，不需小數點的數，其後綴零是否為有效數字，需要額外標記或藉由其不確定度方能判定。建議採用科學記號，即可避免不必要的困擾，如 7000 無法直接判別其有效數字，但 $7.00\times10^3$ 可直接看出其有效數字為 3 位。

### 4. 不確定度A類評估的計算流程與實例

小龍測量小幅度擺動單擺的週期 4 次，所得 4 個數據為：

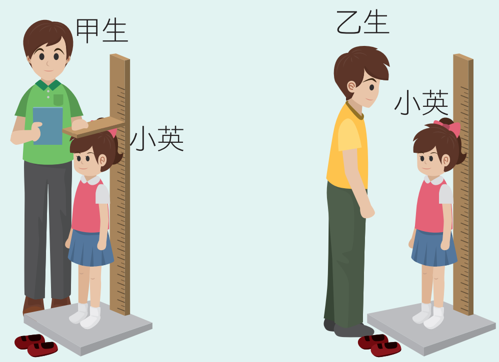
$x_1=2.10$ s、$x_2=2.08$ s、$x_3=2.09$ s、$x_4=2.04$ s

則計算不確定度的流程與方法如下：

| 步驟 | 說明 | 實作 |
| --- | --- | --- |
| 步驟1 | **求出 $\bar{x}$ 與 $s$**<br>分別算出 $\bar{x}$ 與 $s$，可暫時不需擔心保留位數，將計算結果寫下即可。 | ① $\bar{x}=\dfrac{2.10+2.08+2.09+2.04}{4}=2.0775\,(\mathrm{s})$<br>② $s=\sqrt{\dfrac{(2.10-2.0775)^2+(2.08-2.0775)^2+(2.09-2.0775)^2+(2.04-2.0775)^2}{4-1}}$<br>$=0.0262995\cdots(\mathrm{s})$ |
| 步驟2 | **求出不確定度 $u(X)$**<br>將 $u(X)=\dfrac{s}{\sqrt{n}}$ 的計算結果，以無條件進位法，至多保留 2 位有效數字，即為不確定度。 | $u(X)=\dfrac{s}{\sqrt{n}}=\dfrac{0.0262995\cdots}{\sqrt{4}}=0.0131\cdots(\mathrm{s})$，<br>以無條件進位法保留 2 位有效數字，得 $u(X)=0.014\,(\mathrm{s})$ |
| 步驟3 | **求出最佳估計值 $X$**<br>將 $\bar{x}$ 的計算結果，以四捨五入進位法，保留到與不確定度的末位一致，即為最佳估計值 $X$。 | $X=2.078\,(\mathrm{s})$ |
| 步驟4 | **寫出測量結果**<br>測量結果<br>$=X\pm u(X)$ | 單擺週期 $=(2.078\pm0.014)$ s |

## 範例 1 不確定度的A類評估

物理老師為了讓同學了解測量方法會影響測量的品質及不確定度，先請甲生以右圖所示的 A 方法幫小英量身高（木尺加上輔助器材，木尺的最小刻度為 cm）。待甲生量測完畢，老師將輔助器材拆除，再請乙生以右圖所示的 B 方法幫小英量身高（僅用木尺）。兩人所得的數據如下表所示：




A方法：木尺加輔助器材　B方法：僅用木尺

| | 第 1 次 | 第 2 次 | 第 3 次 | 第 4 次 | 第 5 次 | 第 6 次 | 第 7 次 | 第 8 次 | 第 9 次 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A 方法 (cm) | 166.2 | 165.6 | 165.5 | 166.4 | 166.8 | 165.2 | 165.4 | 165.6 | 165.8 |
| B 方法 (cm) | 163.2 | 169.6 | 168.5 | 169.4 | 168.8 | 164.2 | 161.4 | 162.6 | 164.8 |

(1) 請依據表格資料，完成不確定度、最佳估計值的計算，並將測量結果填寫到表格欄位中。

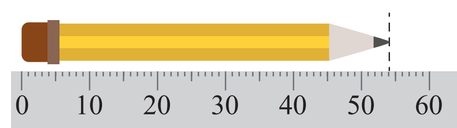
| | 平均值 | 標準差 $s$ | A 類不確定度 $u(X)$ | 最佳估計值 $X$ | 測量結果 |
|---|---|---|---|---|---|
| A 方法 (cm) | 165.833 | 0.5244 | | | |
| B 方法 (cm) | 165.833 | 3.2326 | | | |

(2) 你認為哪一種方法的品質比較好呢？請說明你的理由並分析其原因。

### 馬上練習 1

下圖所示直尺的最小刻度為 mm，甲生和乙生測量同一支鉛筆的長度各 4 次，數據如下（單位為 mm）：

| | 甲生 (mm) | 乙生 (mm) |
|---|---|---|
| 第 1 次 | 52.3 | 51.4 |
| 第 2 次 | 54.6 | 57.6 |
| 第 3 次 | 55.8 | 55.6 |
| 第 4 次 | 55.2 | 57.5 |
| 平均值 $\bar{x}$ | 54.475 | 55.525 |
| 標準差 $s$ | 1.5305 | 2.8999 |
| A 類不確定度 $u(X)$ | | |
| 最佳估計值 $X$ | | |
| 測量結果 | | |




(1) 請依據表格資料，完成不確定度、最佳估計值的計算，並將測量結果填寫到表格欄位中。

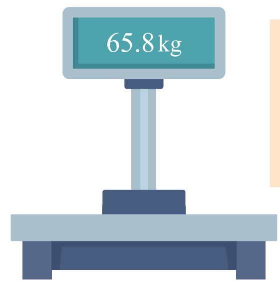
(2) 你認為甲生或乙生的量測品質哪一個比較好呢？請說明你的理由。

## 四、不確定度的B類評估

### 1. B類評估簡介

(1)除了測量統計分析外，藉由其他資訊來評估不確定度者，即是 B 類評估，例如權威機構發布的量值、材料或儀器特性、製造商提供的規格、校正證書……等等。

(2)舉例而言，小明買了一個電子秤，說明書上廠商提供的資訊如圖所示。小明量質量時，測量了 10 次，每次的數值皆為 65.8 kg。若是由 A 類評估方法，所得不確定度為 0，這當然是不合理的，因此需藉由不同的方法來計算不確定度。



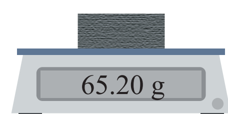

・測量方式：電子式
・測量單位：kg(公斤)
・測量範圍：5~180kg
・精確度：100g

(3)如圖所示，電子秤的說明書上載明**精確度**（有的儀器會以精度、解析度、精準度、最小刻度、最小顯示單位…等名詞表現）為 100g（即 0.1 kg），故電子秤上顯示 65.8 kg 可能是由 65.7500…kg ( ≈ 65.75 kg) 進位而來，也可能是 65.8499…kg ( ≈ 65.85 kg) 捨棄而來，此區間都是 65.8 kg 這個量測值可能的範圍。

(4)若假設測量值在此區間均勻分布，依據統計計算可得 B 類不確定度與儀器精確度（最小刻度）間的關係為：B 類不確定度 $u(X)=\dfrac{\text{儀器精確度}}{2\sqrt{3}}$。小明所用之電子秤的精確度為 0.1 kg，$u(X)=\dfrac{0.1}{2\sqrt{3}}=0.028867\cdots$ kg，以無條件進位法保留 2 位有效數字，可得 B 類不確定度為 0.029 kg。故小明測量質量的結果可記作 $(65.800\pm0.029)$ kg。

### 2. 不確定度B類評估的計算流程與實例

小明以右圖所示的電子天平測量某物體質量，說明書上載明精確度為 0.01 g，其顯示的量測值為 65.20 g。




| 步驟 | 說明 | 實作 |
|---|---|---|
| 步驟 1 | **求出不確定度**<br>依據規格說明、過往數據分析、數據隨附資料等等估算，至多保留 2 位有效數字，即為不確定度 $u(X)$。 | $u(X)=\dfrac{\text{儀器精確度}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{0.01}{2\sqrt{3}}$<br>$=0.0028867\cdots\approx0.0029$ g<br>（以無條件進位法保留 2 位有效數字） |
| 步驟 2 | **求出最佳估計值**<br>將測量值以四捨五入進位法，保留到與不確定度的末位一致，即為最佳估計值 $X$。 | 最佳估計值 $X=65.2000$ (g)<br>（此處最佳估計值需補二位零，才會與不確定度的末位一致。） |
| 步驟 3 | **寫出測量結果**<br>測量結果 $=X\pm u(X)$ | 測量值 $=(65.2000\pm0.0029)$ g |

## 範例 2 不確定度的B類評估

圖 (a) 所示捲尺是家中常備測量長度的小工具，隨著科技的進步，現在我們可以用圖 (b) 所示的雷射測距儀來取代捲尺。小英買了一個雷射測距儀，說明書上揭露的資訊如圖所示。小英利用它來測量樓層高度，雷射測距儀顯示的高度數值為 2.600 m，小英該如何紀錄此測量結果呢？

▲圖 (a)　捲尺

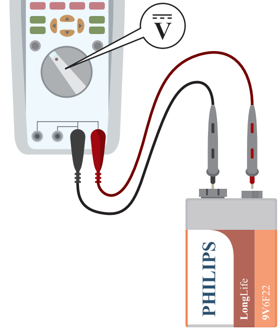
・測量範圍：0.33~40(m)
・測量單位：m
・精確度：2mm

▲圖 (b)　雷射測距儀

### 馬上練習2

小柯想測試市售的 9 V 電池的電壓是否真的是 9 伏特，於是拿出如圖所示的三用電表測試。該三用電表的說明書上揭露的資訊顯示，測量小於 50 V 的直流電壓時，精確度為 0.001 V。他將檔位切換到直流電壓檔，液晶螢幕顯示為 9.752 VDC（直流電壓 9.752 V），則他應將此測量結果記為 ______________ 。

| 直流電壓規格 | | |
| --- | --- | --- |
| 功能 | 量程 | 精確度 |
| V DC | 50 V | 0.001V |



# 段考基礎練習題

## 主題練習

**概念** 不確定度的 A 類評估

1. 物理老師提供同一個測量儀器，請 196 位學生測量白板筆的直徑，此 196 個數據的資料如下表所示（單位為 mm）。老師已經用 Excel 算出平均值為 15.9097 mm，標準差為 0.3723 mm。

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15.02 | 15.06 | 15.10 | 15.10 | 15.10 | 15.14 | 15.18 | 15.20 | 15.22 | 15.26 | 15.26 | 15.26 | 15.26 | 15.26 | 15.26 |
| 15.30 | 15.30 | 15.34 | 15.34 | 15.38 | 15.42 | 15.46 | 15.50 | 15.54 | 15.58 | 15.58 | 15.58 | 15.62 | 15.62 | 15.62 |
| 15.62 | 15.66 | 15.66 | 15.66 | 15.66 | 15.66 | 15.66 | 15.66 | 15.70 | 15.70 | 15.70 | 15.70 | 15.70 | 15.70 | 15.74 |
| 15.74 | 15.74 | 15.74 | 15.74 | 15.74 | 15.74 | 15.74 | 15.74 | 15.74 | 15.74 | 15.74 | 15.74 | 15.78 | 15.78 | 15.78 |
| 15.78 | 15.78 | 15.78 | 15.78 | 15.78 | 15.78 | 15.78 | 15.78 | 15.78 | 15.78 | 15.78 | 15.82 | 15.82 | 15.82 | 15.82 |
| 15.82 | 15.82 | 15.82 | 15.82 | 15.82 | 15.82 | 15.82 | 15.82 | 15.82 | 15.82 | 15.82 | 15.82 | 15.82 | 15.82 | 15.86 |
| 15.86 | 15.86 | 15.86 | 15.86 | 15.86 | 15.86 | 15.86 | 15.86 | 15.86 | 15.86 | 15.86 | 15.86 | 15.86 | 15.86 | 15.90 |
| 15.90 | 15.90 | 15.90 | 15.90 | 15.90 | 15.90 | 15.90 | 15.90 | 15.94 | 15.94 | 15.94 | 15.94 | 15.94 | 15.94 | 15.94 |
| 15.94 | 15.94 | 15.94 | 15.94 | 15.94 | 15.94 | 15.94 | 15.98 | 15.98 | 15.98 | 15.98 | 15.98 | 15.98 | 16.02 | 16.02 |
| 16.02 | 16.02 | 16.06 | 16.06 | 16.06 | 16.06 | 16.10 | 16.10 | 16.10 | 16.10 | 16.10 | 16.10 | 16.10 | 16.10 | 16.14 |
| 16.14 | 16.14 | 16.14 | 16.14 | 16.18 | 16.18 | 16.18 | 16.22 | 16.26 | 16.26 | 16.30 | 16.30 | 16.30 | 16.30 | 16.30 |
| 16.34 | 16.34 | 16.34 | 16.38 | 16.38 | 16.38 | 16.38 | 16.38 | 16.38 | 16.42 | 16.42 | 16.42 | 16.42 | 16.42 | 16.46 |
| 16.46 | 16.46 | 16.50 | 16.50 | 16.54 | 16.54 | 16.54 | 16.58 | 16.62 | 16.66 | 16.70 | 16.74 | 16.78 | 16.82 | 16.86 |
| 16.90 | | | | | | | | | | | | | | |

根據這些資料，試回答下列問題：

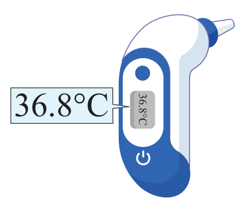
(1) 測量的 A 類不確定度為 __________ mm。

(2) 測量的最佳估計值為 __________ mm。

(3) 此次測量結果，白板筆的直徑應表示為 ____________________。

**概念** 不確定度的 B 類評估

2. 維妮感覺身體不舒服，因此拿出耳溫槍量測體溫，結果顯示的溫度是 36.8°C。她查了說明書，得知此溫度計的儀器精確度為 0.1°C，則她的體溫應記為 ____________________。



# 1-2 ▸ 不確定度的組合

## 一、同時存在A類與B類的不確定度

1. 若測量時同時存在 A 類與 B 類的不確定度，根據 ISO-GUM 評估準則，其組合不確定度可表示為 $u=\sqrt{u_A{}^2+u_B{}^2}$
2. 此式推導雖然遠超出高中程度，但就跟在直角坐標系中計算距離的公式類似，有異曲同工之妙。

**範例 1** 組合不確定度

如圖所示，徐同學利用最小刻度為 1cm 的直尺，測量他的手機長度。他測量 4 次，所得數據如表所示：

| 第 1 次 (cm) | 第 2 次 (cm) | 第 3 次 (cm) |
|---|---|---|
| 14.8 | 14.5 | 14.1 |
| 第 4 次 (cm) | 平均值 $\bar{x}$(cm) | 標準差 $s$(cm) |
| 14.9 | 14.575 | 0.3594 |


(1) 此次測量的 A 類不確定度為 ________ cm。
(2) 此次測量的 B 類不確定度為 ________ cm。
(3) 此次測量結果的組合不確定度為 ________ cm，測量值應表示為 ________________ cm。

### 馬上練習1

承範例1，徐同學也想知道手機的重量，利用最小刻度為1gw的彈簧秤，測量手機的重量。他測量4次，所得數據如表所示：

| 第1次 (gw) | 第2次 (gw) | 第3次 (gw) | 第4次 (gw) | 平均值 $\bar{x}$(gw) | 標準差 $s$(gw) |
|---|---|---|---|---|---|
| 187.3 | 187.9 | 187.5 | 187.8 | 187.625 | 0.2754 |

(1)此次測量的A類不確定度為 ________ gw。
(2)此次測量的B類不確定度為 ________ gw。
(3)此次測量結果的組合不確定度為 ________ gw，測量值應表示為 ________________ gw。

## 二、物理量加減後的不確定度

1. 物理量相加後的不確定度

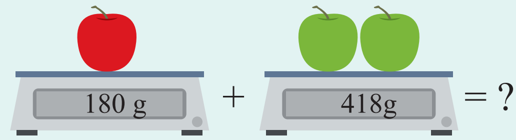
若獨立測量物理量 $x$、$y$ 後，加總所得的物理量為 $z=x+y$，根據ISO-GUM評估準則：
(1)不確定度 $u(Z)=\sqrt{u(X)^2+u(Y)^2}$。
(2)最佳估計值 $Z=X+Y$，其有效位數的取法，則需依照組合後的不確定度 $u(Z)$ 來計算。
(3)測量結果 $=(X+Y)\pm\sqrt{u(X)^2+u(Y)^2}$。

2. 物理量相減後的不確定度

若獨立測量物理量 $x$、$y$ 後，加總所得的物理量為 $z=x-y$，根據ISO-GUM評估準則：
(1)不確定度 $u(Z)=\sqrt{u(X)^2+u(Y)^2}$。
(2)最佳估計值 $Z=X-Y$，其有效位數的取法，則需依照組合後的不確定度 $u(Z)$ 來計算。
(3)測量結果 $=(X-Y)\pm\sqrt{u(X)^2+u(Y)^2}$。

## 範例 2　相加後的不確定度

小張利用家裡的電子秤，想要測量媽媽剛買回家的一顆紅蘋果和兩顆青蘋果之總質量。他分別對紅蘋果與青蘋果的質量，進行獨立的測量（兩次的測量沒有相關性），測得紅蘋果的質量為 180 g，而兩顆青蘋果的質量則為 418 g，如圖所示（經多次測量所得數據皆相同）。已知該電子秤的儀器精確度是 1 g，則：



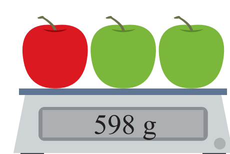

(1) 此次測量蘋果總質量的不確定度為 ________ g。

(2) 此次測量蘋果總質量的最佳估計值為 __________ g。

(3) 此次測量結果，蘋果的總質量應表示為 ____________________。

### 馬上練習2

承範例 1，接著小張將三顆蘋果一起測量，經多次測量電子秤顯示的讀數皆為 598 g，如圖所示。則：




(1) 測量的不確定度為 ________ g。

(2) 測量的最佳估計值為 __________ g。

(3) 此次測量結果，蘋果的總質量應表示為 ____________________。

(4) 你認為「將三顆蘋果分二次測量」和「將三顆蘋果一起測量」，何種方式的測量品質比較好？試簡述其理由。

## 三、物理量相乘除後的不確定度

1. 相對不確定度

(1) 兩個物理量相乘除後的不確定度，引入「相對不確定度」來處理。當物理量 $z=xy$ 或 $z=\dfrac{x}{y}$ 時，$z$ 的相對不確定度定義為 $\dfrac{u(Z)}{|Z|}=\sqrt{\dfrac{u(X)^2}{X^2}+\dfrac{u(Y)^2}{Y^2}}$，式中使用絕對值 $|Z|$ 可讓相對不確定度恆為正。

(2) 將上式交叉相乘，可得物理量相乘除後的組合不確定度 $u(Z)=|Z|\sqrt{\dfrac{u(X)^2}{X^2}+\dfrac{u(Y)^2}{Y^2}}$

2. 物理量相乘後的不確定度

(1) 當物理量 $z=xy$ 時，$z$ 的相對不確定度為 $\dfrac{u(Z)}{|XY|}=\sqrt{\dfrac{u(X)^2}{X^2}+\dfrac{u(Y)^2}{Y^2}}$

$\Rightarrow$ 物理量相乘後的組合不確定度 $u(Z)=|XY|\sqrt{\dfrac{u(X)^2}{X^2}+\dfrac{u(Y)^2}{Y^2}}=\sqrt{Y^2u(X)^2+X^2u(Y)^2}$。

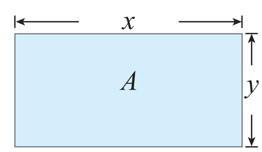
(2) 最佳估計值 $Z=XY$，其有效位數通常以四捨五入原則，與不確定度的末位對齊。

(3) 測量結果 $=XY\pm u(Z)$。

【註：相乘或相除後的不確定度計算極為繁複，高中生學習的重點在於了解其精神即可，建議計算時可透過電腦或計算機】

### 實例說明

小騰想要測量物理筆記本的面積 $A$，其寬度 $x$、長度 $y$，如圖所示。小騰所得長度與寬度測量結果如下表所示。




| 物理量 | 最佳估計值 | 組合不確定度 | 測量結果表示 |
|---|---|---|---|
| 寬度 | $X=20.00$ cm | $u(X)=0.10$ cm | $(20.00\pm0.10)$ cm |
| 長度 | $Y=10.00$ cm | $u(Y)=0.20$ cm | $(10.00\pm0.20)$ cm |

(1) $\begin{cases} XY=20.00\times10.00=200.00 \\ \dfrac{u(X)}{X}=\dfrac{0.10}{20}=0.005 \\ \dfrac{u(Y)}{Y}=\dfrac{0.20}{10}=0.02 \end{cases}$

$\Rightarrow$ 不確定度 $u(A)=200.00\times\sqrt{(0.005)^2+(0.02)^2}=4.1231\cdots(\text{cm}^2)$

※ 或直接利用 $u(A)=\sqrt{Y^2u(X)^2+X^2u(Y)^2}=\sqrt{10.00^2\times0.10^2+20.00^2\times0.20^2}$
$=4.1231\cdots(\text{cm}^2)$，以無條件進位法，僅保留 2 位有效數字，故 $u(A)=4.2\ \text{cm}^2$。

(2) 最佳估計值 $A=XY=200.00\ \text{cm}^2$，以四捨五入原則，與不確定度的末位對齊，故取 $A=200.0\ \text{cm}^2$。

(3) 測量結果應表示為 $(200.0\pm4.2)\ \text{cm}^2$。

3. 物理量相除後的不確定度

(1) 當物理量 $z=\dfrac{x}{y}$ 時，$z$ 的相對不確定度為 $\dfrac{u(Z)}{\left|\dfrac{X}{Y}\right|}=\sqrt{\dfrac{u(X)^2}{X^2}+\dfrac{u(Y)^2}{Y^2}}$。

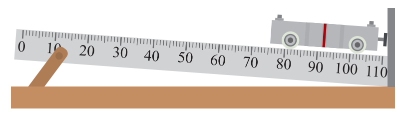
$\Rightarrow$ 物理量相除後的組合不確定度 $u(Z)=\left|\dfrac{X}{Y}\right|\sqrt{\dfrac{u(X)^2}{X^2}+\dfrac{u(Y)^2}{Y^2}}=\sqrt{\dfrac{u(X)^2}{Y^2}+\dfrac{X^2u(Y)^2}{Y^4}}$。

(2) 最佳估計值 $Z=\dfrac{X}{Y}$，其有效位數通常以四捨五入原則，與不確定度的末位對齊。

(3) 測量結果 $=\dfrac{X}{Y}\pm u(Z)$。

## 實例說明

在實驗室中，我們只要將平面傾斜一個特定角度，便可讓滑車在此平面作等速運動，如圖所示。小龍已調整正確角度，讓滑車作等速運動。他想測量此時滑車的速度，分別測量了位移量值 $x$ 及時間 $t$，測量結果如下表所示。




| 物理量 | 最佳估計值 | 組合不確定度 | 測量結果表示 |
|---|---|---|---|
| 位移量值 | $X=100.0$ cm | $u(X)=2.0$ cm | $(100.0\pm2.0)$ cm |
| 時間 | $T=10.00$ s | $u(T)=0.10$ s | $(10.00\pm0.10)$ s |

(1) $\begin{cases}\dfrac{X}{T}=\dfrac{100.0}{10.00}=10.0\\[2mm]\dfrac{u(X)}{X}=\dfrac{2.0}{100.0}=0.020\\[2mm]\dfrac{u(T)}{T}=\dfrac{0.10}{10.00}=0.01\end{cases}$

$\Rightarrow$ 不確定度 $u(V)=10.0\times\sqrt{(0.020)^2+(0.01)^2}=0.2236\cdots(\text{cm/s})$

※ 或直接利用 $u(V)=\sqrt{\dfrac{u(X)^2}{T^2}+\dfrac{X^2u(T)^2}{T^4}}=\sqrt{\dfrac{(2.0)^2}{(10.00)^2}+\dfrac{(100.0)^2(0.10)^2}{(10.00)^4}}=0.2236\cdots(\text{cm/s})$，

以無條件進位法，僅保留 2 位有效數字，故 $u(V)=0.23$ cm/s。

(2) 最佳估計值 $V=\dfrac{X}{T}=10.0$ cm/s，與不確定度的末位對齊，故補上一位零，

取 $V=10.00$ cm/s。

(3) 測量結果應表示為 $(10.00\pm0.23)$ cm/s。

# 段考基礎練習題

## 主題練習

### 概念 物理量加減後的不確定度

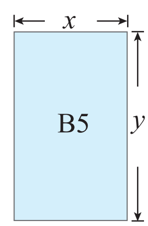
1. 小徐買了一臺鍵盤可和主機分離的變形筆電，以儀器精確度為 0.1 g 的電子秤測其質量。單獨秤主機時，電子秤顯示的讀數為 790.0 g；單獨秤鍵盤時，電子秤顯示的讀數為 310.0 g；（經多次測量所得數據皆相同）則：

   (1) 此次測量筆電質量總和的不確定度為 ________ g。

   (2) 此次測量筆電質量總和的最佳估計值為 ___________ g。

   (3) 此次測量結果，筆電的總質量應表示為 ____________________。

### 概念 物理量相乘除後的不確定度




2. 常用的 B5 紙張，其規格如圖所示。小騰想要測量 B5 紙張的面積，其對長度 $y$ 與寬度 $x$ 的測量結果如下表所示。則：

| 物理量 | 最佳估計值 | 組合不確定度 | 測量結果表示 |
|---|---|---|---|
| 寬度 | $X=18.25$ cm | $u(X)=0.10$ cm | $(18.25\pm0.10)$ cm |
| 長度 | $Y=25.50$ cm | $u(Y)=0.20$ cm | $(25.50\pm0.20)$ cm |

   (1) 此次面積測量的不確定度為 ______ $\text{cm}^2$。

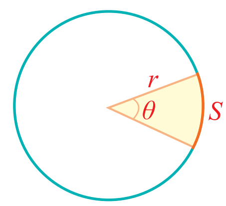
   (2) 此次面積測量的最佳估計值為 ________ $\text{cm}^2$。

   (3) 測量結果應表示為 _________________。

# 1-3 物理量的因次

## 一、因次

1. 通常描述一個物理量需包含量值和單位兩部分，量值的多寡和所使用的單位有關。例如物理老師身高 172 公分，也可以表達為 1.72 公尺，像這種描述相同物理量但使用不同單位，我們稱它們都具有相同的**因次**。
2. 不管使用公分、公尺、公里甚至光年當單位，它們所代表的物理量都是長度，因此我們說它們有相同的**長度因次**。同理，所有的質量單位，例如公斤、公克、毫克等也具有相同的**質量因次**；而所有的時間單位，例如秒、月、季等，也具有相同的**時間因次**。
3. 所有的物理量都有因次嗎？當然不是，如圖所示，角度的定義為其所張的弧長除以半徑長 ($\theta=\dfrac{S}{r}$)，而弧長及半徑長均為長度，故兩者相除後無因次。又如物質比重的定義為：物質和水同體積時，該物質和水兩者質量（或重量）的比值，亦為沒有因次的物理量。




角度$\theta=\dfrac{S}{r}$

## 二、物理量的因次表示法

### 1. 力學的三個基本量

(1) 物理量可分為**基本量**和**導出量**兩種。

(2) 在力學中以**長度**、**時間**、**質量**來作為基本量，其因次分別表示為 **L**、**T**、**M**，稱為基本因次。力學中其他的物理量都可以由這三個基本量導出，其因次皆可表示為 $L^aM^bT^c$ 的冪次組合。

### 2. 導出量的因次

(1) 物理量的因次以 [　] 來表記，例如位移的因次為 $[\Delta x]=L$。

(2) 物理學導出量的因次都可以用基本量的因次表示，因次與 SI 單位互相對應，例如：

① 速度 $v$ 的定義為單位時間內之位移 ($\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$) ⇒ SI 單位為 m/s ⇒ $[v]=$ ________。

② 加速度 $a$ 的定義為單位時間內之速度變化量 ($\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$) ⇒ SI 單位為 $m/s^2$

⇒ $[a]=$ ________。

## 範例 1 導出量的因次

(1) 力的因次 $[F]$= ＿＿＿＿＿＿。

(2) 力矩的因次 $[\tau]$= ＿＿＿＿＿＿。

### 馬上練習 1

(1) 功的因次 $[W]$= ＿＿＿＿＿＿。

(2) 動能的因次 $[K]$= ＿＿＿＿＿＿。

(3) 重力位能的因次 $[U]$= ＿＿＿＿＿＿。

## 三、因次分析法

1. 因次可用來檢驗物理方程式是否合理，正確的方程式中之每一項必定具有相同的因次。例如下表所示的等加速度運動末速公式。

| 公式 | $v$ | $=$ | $v_0$ | $+$ | $at$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 單位 | m/s | | m/s | | $(\text{m/s}^2)\cdot\text{s}=\text{m/s}$ |
| 因次 | $\text{LT}^{-1}$ | | $\text{LT}^{-1}$ | | $\text{LT}^{-1}$ |

2. 因此，我們常常可以利用因次分析來判斷計算的結果是否正確？也可以利用因次分析來推求數個物理量之間的關係。

## 範例 2 因次分析法

欲了解聲波如何在金屬中傳播，可利用簡化的一維模型：將金屬原子視為質量 $m$ 的小球，以間距 $d$ 排列成一直線，且相鄰兩個小球間以彈性常數 $k$ 的彈簧連結，藉以模擬原子間的作用力。在此簡化模型的假設下，應用因次分析來判定，下列何者可能為金屬中的聲速？

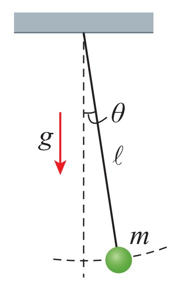
(A) $d\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (B) $d\sqrt{mk}$ (C) $\sqrt{\dfrac{dm}{k}}$ (D) $\dfrac{dk}{m}$ (E) $\dfrac{mk}{d}$。 〈105指考，答對率58%〉

答 ＿＿＿

※ 如果題目不是選擇題，該怎麼辦呢？參考馬上練習 2 ！

## 馬上練習2

如圖所示的單擺，已知作小角度擺動時，其週期與擺角 $\theta$ 無關，故可合理推論單擺週期 $T$ 可能與擺長 $\ell$、擺錘質量 $m$ 及重力加速度 $g$ 有關，設 $T=k\ell^a m^b g^c$（$k$ 為一無因次的比例常數）的關係式，試應用物理量的因次分析，找出 $a$、$b$、$c$ 的值，進而得到正確的關係式。




# 段考基礎練習題

＊為多選題

## 主題練習

**概念** 因次表示法

1. 試完成下表：

| 物理量 | SI 單位 | 因次 |
|---|---|---|
| 密度 $D$ | $kg/m^3$ | |
| 速率 $V$ | m/s | |
| 壓力 $P$ | $N/m^2$ | |

2. 重力常數 $G$ 的因次 $[G]=$ ______________。

________ 3. 下列關於因次的敘述，何者是正確的？

(A) 兩個相同因次的物理量，必定有相同的物理意義
(B) 具有相同因次的物理量才可以進行加或減的運算
(C) 具有相同因次的物理量才可以進行乘或除的運算
(D) 等式兩邊的物理量，可能具有不同的因次
(E) 公斤和公斤重具有相同的因次。

**概念** 因次分析法

________ 4. 在不考慮 $g$ 與 $h$ 之外的其他變因下，試以因次分析法判斷下列何者可能是水波波速 $v$ 和水深 $h$ 及重力加速度 $g$ 之間的關係？

(A) $v \propto gh^2$　(B) $v \propto g^2h$　(C) $v \propto gh$　(D) $v \propto \sqrt{gh}$　(E) $v \propto g\sqrt{h}$ 。

## 分科測驗進攻題

＊為多選題

### 進階試題

________ 1. 設甲、乙兩個行星同繞太陽在同一平面上作等速圓周運動，且繞行方向相同，週期分別為 $T_1$ 及 $T_2$，其中 $T_2 > T_1$。則每隔多久時間，兩行星將交會一次（與太陽連成一直線）？

(A) $\dfrac{T_2+T_1}{T_2-T_1}$　(B) $\dfrac{T_2-T_1}{T_2+T_1}$　(C) $\dfrac{T_2-T_1}{T_2T_1}$　(D) $\dfrac{T_2T_1}{T_2-T_1}$　(E) $\dfrac{T_2}{T_2-T_1}$ 。

(1) 試用因次分析法判斷出答案。
(2) 以數學方法算出答案。

# 素養題 測量方法與不確定度

由於紙張很薄，通常厚度都小於 1 mm，因此臺灣的印刷業採用一種特殊的長度單位－「條」來表示紙張厚度，以避免太多小數點造成的不方便，而 1 條＝0.01 mm。

至於怎麼測量紙張的厚度呢？我們可以使用如圖所示的厚薄規（俗稱量紙器）。運用量紙器的指針即可量出條數，例如若指針指在刻度 11 處，代表該紙張的厚度為 11 條＝11×0.01 mm＝0.11 mm。

一般的影印紙厚度約 0.07 mm，小玉到文具店買了較一般影印紙厚的噴墨印表機專用紙，廠商在包裝上號稱該紙張的厚度為 0.15 mm。為了驗證廠商的標示是否屬實，小玉決定用量紙器來測量紙張的厚度。

首先，小玉一次測量 1 張紙的厚度，數據如下表：

| 次數 | 第 1 次 | 第 2 次 | 第 3 次 | 第 4 次 | 第 5 次 | 第 6 次 | 第 7 次 | 第 8 次 | 第 9 次 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 紙張厚度 (mm) | 0.154 | 0.144 | 0.148 | 0.151 | 0.149 | 0.153 | 0.148 | 0.149 | 0.152 |

上述數據處理後可得：平均值為 0.14978 mm，而標準差約為 0.00307 mm。

小玉又想到一個方法，一次測量 10 張紙的厚度，再算出 1 張紙張的厚度，數據如下表：

| 次數 | 第 1 次 | 第 2 次 | 第 3 次 | 第 4 次 | 第 5 次 | 第 6 次 | 第 7 次 | 第 8 次 | 第 9 次 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 張紙的厚度 (mm) | 1.520 | 1.490 | 1.520 | 1.540 | 1.480 | 1.500 | 1.520 | 1.480 | 1.540 |
| 1 張紙的厚度 (mm) | 0.152 | 0.149 | 0.152 | 0.154 | 0.148 | 0.150 | 0.152 | 0.148 | 0.154 |

上述數據處理後可得：1 張紙厚度的平均值為 0.151 mm，而標準差約為 0.00235 mm。

原來運用相同的測量工具，使用不同的測量設計，也可以有效降低測量的不確定度呢！

根據上述資料，試回答下列問題： 【混合題】

*______ 1. 小玉以量紙器測量面紙厚度，刻度如右圖所示，則面紙的厚度約為多少？

(A) 11 條 (B) 1.1 mm (C) 0.11 mm (D) 11 $\mu$m (E) 110 $\mu$m。

_______ 2. 小玉每次測量 1 張紙厚度的實驗方法，下列何者為其測量結果的正確表示法？
(A) (0.15±0.001023) mm (B) (0.150±0.001) mm (C) (0.1500±0.0010) mm
(D) (0.14978±0.0011) mm (E) (0.1498±0.0011) mm。

3. 你認為利用哪一種方法的測量結果比較好？廠商有沒有誇大之嫌呢？試簡述之。

本章圖片來源

P13 耳溫計、P11 電子秤、P12 捲尺與雷射測距儀、P18 筆電、P24 量紙器 ／ Shutterstock 圖庫